

Научная статья

УДК 517.54+515.12+519.172

DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-33-51

О САМОПОДОБНЫХ ДЕНДРИТАХ С ТОЧКАМИ ВЕТВЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Махлиё Бобохон кизи Кадирова¹
Андрей Викторович Тетенев²

¹Новосибирский государственный университет
Новосибирск, Россия,

²Новосибирский государственный университет,
Институт Математики им. С.Л.Соболева СО РАН
Новосибирск, Россия,

¹m.kadirova@g.nsu.ru; <https://orcid.org/0009-0001-8714-9451>

²a.tetenov@g.nsu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-5419-5710>

Аннотация

Как известно, для самоподобных дендритов в \mathbb{R}^2 порядки ветвления их точек ограничены. В статье доказывается существование самоподобных дендритов в \mathbb{R}^5 , имеющих точки ветвления бесконечного порядка.

Ключевые слова и фразы

самоподобный дендрит, точка ветвления, слабое условие отделимости, теорема об общем положении.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2026-0026)

Для цитирования

Кадилова М. Б., Тетенев А. В. О самоподобных дендритах с точками ветвления бесконечного порядка // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 2, С. 33-51. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-33-51

On self-similar dendrites with branch points of infinite order

Makhliyo B. Kadirova¹, Andrei V. Tetenov²,

¹Novosibirsk State University,
Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State University,
Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian
Academy of Sciences Novosibirsk, Russia

¹m.kadirova@g.nsu.ru; <https://orcid.org/0009-0001-8714-9451>

²a.tetenov@g.nsu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-5419-5710>

Abstract

As is well known, for self-similar dendrites in \mathbb{R}^2 , the ramification orders of their points are bounded. This article proves the existence of self-similar dendrites in \mathbb{R}^5 with ramification points of infinite order.

Keywords

self-similar dendrite, ramification point, weak separation property, general position theorem.

Funding

The study was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project no. FWNF-2026-0026)

For citation

Kadirova M. B., Tetenov A. V., On self-similar dendrites with branch points of infinite order // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 2, P. 33-51. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-33-51

§ 1. Введение и постановка задачи

Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ — система сжимающих подобий в \mathbb{R}^n . Непустое компактное множество, для которого $K = \bigcup_{i=1}^m S_i(K)$, называется *самоподобным множеством* или *аттрактором* системы \mathcal{S} .

Его существование и единственность доказаны Хатчинсоном в работе [1] 1981 года, развивающей идеи Морана [4] и Мандельброта [5] и стимулировавшей всплеск активных исследований (см. напр. [2, 3]) в геометрической теории фрактальных объектов.

Одним из центральных понятий теории самоподобных множеств является условие открытого множества (Open Set Condition, OSC). Система \mathcal{S} удовлетворяет условию открытого множества, если существует непустое открытое множество $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ такое, что все множества $S_i(\mathcal{O})$, $\{1 \leq i \leq m\}$ попарно не пересекаются и содержатся в \mathcal{O} . Как было доказано Хатчинсоном [1], при выполнении OSC хаусдорфова размерность аттрактора K равна размерности подобия s системы \mathcal{S} , а мера $H^s(K) > 0$.

В поисках удобной альтернативы OSC, Бандт и Граф [7] исследовали ассоциированное семейство отображений $\mathcal{F} = S_i^{-1}S_j$, где \mathbf{i} и \mathbf{j} — несравнимые мультииндексы. Они показали, что условие $\text{Id} \notin \bar{\mathcal{F}}$ слабее, чем условие открытого множества, но также влечёт положительность меры аттрактора: $H^s(K) > 0$.

Система \mathcal{S} обладает слабым условием отделимости (WSP), если Id не является предельной точкой семейства \mathcal{F} , но может являться его изолированной точкой. Это условие является более слабым, чем условие Бандта-Графа $\text{Id} \notin \bar{\mathcal{F}}$, и также гарантирует положительность меры K .

Основные топологические свойства аттрактора K определяются структурой пересечений его копий $S_i(K)$.

Говорят, что система подобий \mathcal{S} с аттрактором K обладает свойством конечного пересечения (Finite Intersection Property, FIP), если пересечение $S_i(K) \cap S_j(K)$ является конечным множеством для любых различных индексов $i \neq j$.

Бандтом и Рао [8] было доказано, что если система сжимающих подобий \mathcal{S} в \mathbb{R}^n , $n \leq 2$ имеет связный аттрактор K и обладает свойством конечного пересечения, то эта система удовлетворяет OSC.

Однако, в работе [9] было доказано, что в \mathbb{R}^n при $n \geq 3$ существует система сжимающих подобий с одноточечными пересечениями копий, которая не удовлетворяет OSC. Также в случае, когда аттрактор несвязен, в [10] было доказано, что даже в \mathbb{R} существует система с одноточечным пересечением и вполне несвязным аттрактором, не удовлетворяющая OSC.

Структурные свойства самоподобных жордановых дуг были достаточно полно изучены в работе Тетенова [6]. Однако, следующий по сложности класс самоподобных множеств — самоподобные дендриты отличается разнообразием конструкций и богатыми связями с теорией ветвящихся процессов.

Как было недавно доказано в работе [11], любой самоподобный дендрит в \mathbb{R}^n , обладающий свойством WSP, имеет конечный порядок ветвления. Из этого вытекает, что любой самоподобный дендрит в \mathbb{R}^2 имеет конечный порядок ветвления. Возникает вопрос, существуют ли самоподобные дендриты в \mathbb{R}^n , $n > 2$ с бесконечным порядком ветвления?

В настоящей работе доказывается существование самоподобных денд-

ритов в \mathbb{R}^5 , имеющих бесконечный порядок ветвления. Доказывается следующая теорема:

Теорема 1. Существует система $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ сжимающих подобий в \mathbb{R}^5 , для которой выполняются следующие условия:

- 1) система \mathcal{S} обладает свойством одноточечного пересечения;
- 2) аттрактор системы \mathcal{S} является дендритом, все точки ветвления которого имеют бесконечный порядок;
- 3) система \mathcal{S} не удовлетворяет OSC.

§ 2. Предварительные сведения

Определение 1. Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ — система сжимающих подобий в \mathbb{R}^n . Непустой компакт K называется самоподобным множеством или аттрактором системы \mathcal{S} , если $K = \bigcup_{i=1}^m S_i(K)$.

При этом, множества $K_i = S_i(K)$ называются копиями аттрактора K .

Равенство $T(A) = S_1(A) \cup S_2(A) \cup \dots \cup S_m(A)$ задает оператор Хатчинсона системы \mathcal{S} , который является сжимающим отображением полного метрического пространства $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ непустых компактных подмножеств в \mathbb{R}^n . В силу этого, аттрактор K существует и однозначно определяется системой \mathcal{S} , а для любого компактного A последовательность множеств $T^n(A)$ сходится к K .

Через $I = \{1, \dots, m\}$ обозначают множество индексов системы \mathcal{S} , а через $I^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n$ — множество всех слов $\mathbf{i} = i_1 \dots i_n$ конечной длины в алфавите I , называемых мультииндексами. Мы пишем $\mathbf{i} \sqsubset \mathbf{j}$, если $\mathbf{j} = \mathbf{i}\mathbf{k}$ для некоторого $\mathbf{k} \in I^*$; \mathbf{i} и \mathbf{j} не сравнимы, если $\mathbf{i} \not\sqsubset \mathbf{j}$ и $\mathbf{j} \not\sqsubset \mathbf{i}$. Мы будем использовать обозначение $S_{\mathbf{j}} = S_{j_1 j_2 \dots j_n} = S_{j_1} S_{j_2} \dots S_{j_n}$, а для аттрактора K обозначать $S_{\mathbf{j}}(K)$ через $K_{\mathbf{j}}$.

Индексным пространством называется множество всех строк $I^\infty = \{\boldsymbol{\beta} = \beta_1 \beta_2 \dots, \beta_i \in I\}$, наделенное топологией бесконечного произведения конечных дискретных множеств. Базу топологии пространства I^∞ образуют открыто-замкнутые множества, называемые цилиндрами $\mathbf{i}I^\infty$, $\mathbf{i} = i_1 \dots i_n \in I^*$, определяемые $\mathbf{i}I^\infty := \{\boldsymbol{\alpha} \in I^\infty : \alpha_1 \dots \alpha_n = i_1 \dots i_n\}$. Отображение $\pi : I^\infty \rightarrow K$, сопоставляющее последовательности $\boldsymbol{\beta}$ в точку $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_{\beta_1 \dots \beta_n} = x$ называется индексной параметризацией аттрактора K .

Определение 2. Система \mathcal{S} удовлетворяет условию открытого множества (OSC), если существует такое открытое множество \mathcal{O} , что для любых $S_i, S_j \in \mathcal{S}$, $S_i(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$ и $S_i(\mathcal{O}) \cap S_j(\mathcal{O}) = \emptyset$ при $i \neq j$.

Определение 3. Система \mathcal{S} удовлетворяет сильному условию открытого множества (SOSC) если она удовлетворяет OSC и $K \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$.

Определение 4. Дендритом называется локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых кривых.

Пусть \mathcal{S} — система с одноточечным пересечением. Рассмотрим двудольный граф $\Gamma(\mathcal{S})$, в котором белым вершинам соответствуют копии $K_i = S_i(K)$, а черными вершинами являются точки пересечения копий $\{p\} = K_i \cap K_j$. При этом вершины p и K_i соединены ребром, если $p \in K_i$. Такой граф $\Gamma(\mathcal{S})$ называется *графом пересечений* системы \mathcal{S} . Мы будем пользоваться следующей теоремой.

Теорема 2 (Tetenov A., Yudin I., Kadirova M. (2025), [12]). *Если \mathcal{S} — система с одноточечным пересечением, а ее граф пересечений $\Gamma(\mathcal{S})$ является деревом, то ее аттрактор K является дендритом.*

Критерий связности аттрактора K системы \mathcal{S} формулируется в следующей теореме М.Ната(1985)[13]

Теорема 3. Пусть K — аттрактор системы сжимающих отображений $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ в полном метрическом пространстве X . Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) для каждого $i, j \in I$ существует $\{i_0, i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$ такое, что $i_0 = i, i_n = j$ и $K_{i_k} \cap K_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ для каждого $k = 0, 1, \dots, n - 1$;
- (2) K связен;
- (3) K локально связен.

§ 3. Построение семейства самоподобных дендритов с бесконечным ветвлением

Зададим семейство параметров

$$D = \left\{ \tau = (\rho, \alpha, \beta) : \rho \in \left(\frac{1}{40}, \frac{1}{20} \right), \alpha, \beta \in \left(\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{12} \right) \right\}$$

Зададим систему $\mathcal{S}_\tau = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ сжимающих подобий пространства $X = \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, зависящую от параметров $(\rho, \alpha, \beta) \in D$, уравнениями

$$\begin{aligned} S_1(x, z_1, z_2) &= 0.25 (1 - x, 1 - z_1, 1 - z_2), \\ S_2(x, z_1, z_2) &= 0.25 (1 + x, 1 + z_1, 1 + z_2), \\ S_3(x, z_1, z_2) &= 0.25 (3 - x, 3 - z_1, 3 - z_2), \\ S_4(x, z_1, z_2) &= 0.25 (3 + x, 3 + z_1, 3 + z_2), \\ S_5(x, z_1, z_2) &= (\rho x, \rho e^{i\alpha} z_1, \rho e^{i\beta} z_2). \end{aligned}$$

Обозначим аттрактор системы \mathcal{S}_τ через K^τ , а его копии — через $K_i = S_i(K^\tau)$. Если это не приводит к двусмысленности, мы будем опускать верхний индекс τ за исключением тех ситуаций, когда мы рассматриваем зависимость K^τ и его копий от параметра τ .

Пусть также $K_0 = \bigcup_{i=1}^4 K_i$.

Лемма 1. *Аттрактор K^τ связан.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$. Заметим, что аттрактором системы $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ является отрезок $J = [0, \mathbf{w}]$, который содержится в K_0 . Поэтому пересечения $K_1 \cap K_2$, $K_2 \cap K_3$ и $K_3 \cap K_4$ непусты. Кроме того, $\{0\} \in K_1 \cap K_5$. Следовательно, по теореме 3, множество K^τ связно. \square

Множество K_0 также связно, как объединение последовательно пересекающихся континуумов $K_i, i = 1, \dots, 4$.



Пусть $S_0(x, z_1, z_2) = \frac{1}{4}(x, z_1, z_2)$. Рассмотрим множество $K_* = K_{15} \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$. Это множество компактно и связно, а множество K_0 можно представить, как объединение

$$K_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_0^n(K_*).$$

Переходя к проекциям копий аттрактора K на ось Ox , получим, что $\text{Pr}_x(K_5) = [0, \rho] \subset [0, 1/20]$. Отсюда следует, что

$$\text{Pr}_x(K_*) \subset \left[\frac{1-\rho}{4}, 1 \right] \subset \left[\frac{2}{9}, 1 \right].$$

Проецируя K на плоскость z_1 , мы видим, что $\text{Pr}_{z_1}(K_5)$ содержится в круге $|z_1| \leq \frac{1}{20}$. Поэтому $\text{Pr}_{z_1}(K_{15} \cup K_{25})$ содержится в круге $|z_1 - 1/4| \leq$

$\frac{1}{80}$, а этот круг содержится в секторе $C_0 = \{z_1 : -\frac{\pi}{60} < \arg z_1 < \frac{\pi}{60}\}$. Поэтому справедливо включение $\text{Pr}_{z_1}(K_*) \subset C_0$, из которого вытекает, что $\text{Pr}_{z_1}(K_0) \subset C_0$.

Поскольку $\frac{\pi}{16} < \alpha < \frac{\pi}{12}$, для любого $\tau \in D$ и любого натурального $1 \leq n \leq 23$, $S_5^n(K_0) \cap K_0 = \{0\}$.

Исследуем попарные пересечения копий 1 порядка аттрактора K^τ .

Лемма 2. При $i = 1, 2, 3$, $K_i \cap K_{i+1} = \{(\frac{i}{4}, \frac{i}{4}, \frac{i}{4})\}$, $K_5 \cap K_1 \supset \{0\}$. Для остальных пар неравных $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $K_i \cap K_j = \emptyset$.

Доказательство. Зададим двойной конус $C_{01} = \{(z_1, z_2) : |z_i| \leq \frac{5}{3}x, |1 - z_i| \leq \frac{5}{3}(1 - x)\}$. Пусть $V_{01} = \{(x, z_1, z_2) : 0 \leq x \leq 1; |z_1 - x|^2 + |z_2 - x|^2 \leq 0.01\}$ — замкнутая 0.1-окрестность отрезка $[0, \mathbf{w}_1]$. Обозначим через V пересечение $C_{01} \cap V_{01}$.

Элементарная проверка показывает, что при любых значениях $\tau \in D$, $S_5(V) \subset V$. Также $S_4(V) \subset V$. Так как для отображения $h((x, z_1, z_2)) = ((1, 1, 1) - (x, z_1, z_2))$, $h(V) = V$, а $S_1 = S_0 \circ h$, $S_1(V) \subset V$, поэтому также $S_3(V) \subset V$.

Из этих включений следует, что $V \supset \bigcup_{i=1}^5 S_i(V)$, поэтому $K \subset V$.

Более того, $K \cap (-K) \subseteq V \cap (-V) = \{0\}$. Это показывает, что $K_1 \cap K_2 = \{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$ и что $K_3 \cap K_4 = \{(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})\}$. Из того, что $K \cap (-K + (2, 2, 2)) = \{(1, 1, 1)\}$, следует равенство $K_2 \cap K_3 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. Также, при $i = 2, 3, 4$, $K_i \cap K_5 = \emptyset$. Все эти равенства выполняются при любых $\tau \in D$. \square

Предложение 1. Пусть при заданном $\tau = (\rho, \alpha, \beta)$, $S_5^k(K_0) \cap K_0 = \{0\}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда:

1. аттрактор K^τ является дендритом;
2. точка 0 является точкой ветвления бесконечного порядка K^τ ;
3. все точки ветвления K^τ являются образами точки 0,
4. система S_τ не удовлетворяет условию открытого множества.

Доказательство. 1. Из условий следует, что $K_5 \cap K_1 = \{0\}$. Поэтому система S обладает свойством одноточечного пересечения, а ее граф пересечений является деревом. По теореме 2, K является дендритом.

2. При любых $k_1 > k_2$ мы получаем, что

$$(S_5^{k_1}(K_0) \cap S_5^{k_2}(K_0)) \setminus \{0\} = S_5^{k_1}(S_5^{k_1-k_2}(K_0) \cap K_0) \setminus \{0\}.$$

Поскольку для любого $k \in \mathbb{N}$ множество $S_5^k(K_0 \setminus \{0\})$ связно, множество $K^\tau \setminus \{0\}$ представляет собой дизъюнктивное объединение бесконечного семейства связных компонент $S_5^k(K_0 \setminus \{0\})$.

3. Самоподобная граница K^τ состоит из двух точек 0 и $(1, 1, 1)$ поэтому

главным деревом в K является отрезок $J = [0, \mathbf{w}]$, поэтому всякая точка ветвления K лежит в $\bigcup S_{i_1 \dots i_n}(J)$ [14, Th. 20]. Такая точка лежит в пересечении как минимум двух копий K , соответствующих не сравнимым мультииндексам.

Заметим, что если для некоторых мультииндексов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, $K_{ij} \cap K_{ik} \neq \emptyset$, а $j_1 \neq k_1$, то $K_{ij} \cap K_{ik} = S_i(K_{j_1} \cap K_{k_1})$.

Рассмотрим, образы каких точек лежат в $K_j \cap K_k$ для разных пар j, k , когда это пересечение непусто:

(а). При $\{j, k\} = \{1, 2\}$ или $\{3, 4\}$, $K_j \cap K_k = S_j(0) = S_k(0)$.

(б). При $\{j, k\} = \{2, 3\}$, $K_j \cap K_k = S_j(\mathbf{w}) = S_k(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}}{2}$.

(с). При $\{j, k\} = \{1, 5\}$, $K_1 \cap K_5 = S_1(\mathbf{w}) = S_5(0)$.

В случае (б) порядок точки $\frac{\mathbf{w}}{2}$ равен 2. Таким же является порядок всех ее образов $S_i(\frac{\mathbf{w}}{2})$ и они не являются точками ветвления K .

В остальных случаях $K_{ij} \cap K_{ik} = \{x\}$, где точка x является образом точки 0 и поэтому является точкой ветвления бесконечного порядка в K .

4. Так как аттрактор K^τ содержит точку ветвления бесконечного порядка, нарушение OSC следует непосредственно из [12, Th. 4.3]. \square

Лемма 3. Если при заданном τ для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $S_5^m(K_*) \cap S_0^n(K_*) = \{0\}$, то точка 0 является точкой ветвления бесконечного порядка аттрактора K^τ .

Доказательство. Так как $K_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_0^n(K_*)$, условие настоящей леммы влечет выполнение условия предложения 1. \square

3.1 Система \mathcal{S}^* с бесконечным ветвлением в гильбертовом пространстве

Пользуясь методом из нашей работы [15], построим в гильбертовом пространстве l_2 такую систему сжимающих подобий $\mathcal{S}^* = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$, что ее аттрактор Q является дендритом с точками ветвления бесконечного порядка, а множество разбивающих точек есть объединение счетного семейства отрезков, параллельных координатным осям в l_2 . Далее мы покажем, что при любом $\tau \in D$ существует липшицево отображение $\varphi : Q \rightarrow K^\tau$, такое, что для любых $i = 1, \dots, 5$ и $\mathbf{x} \in Q$,

$$S_i(\varphi(\mathbf{x})) = \varphi(f_i(\mathbf{x})).$$

Это даст верхнюю оценку размерности множества K^τ .

Рассмотрим гильбертово пространство l_2 с ортонормированным базисом $\{e_1, e_2, \dots\}$ с точками $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) = \sum x_k e_k$. Зададим перестановку

σ множества \mathbb{N} формулой

$$\sigma(n) = \begin{cases} 2k + 1 & \text{при } n = 2k - 1, k \in \mathbb{N} \\ 2k & \text{при } n = 2k + 2, k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{при } n = 2 \end{cases}$$

Зададим ортогональный автоморфизм $O_\sigma : l_2 \rightarrow l_2$ формулой

$$O_\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{\sigma(k)} = (x_2, x_4, x_1, x_6, x_3, x_8, x_5 \dots).$$

Пусть X_n – подпространство в X с базисом $\{e_{2(k+n)-3}, k \in \mathbb{N}\}$. Тогда для любого n , $X_{n+1} = O_\sigma(X_n)$, причем $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset \dots$.

Зададим систему $\mathcal{S}^* = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ сжимающих подобий $[0, e_1]$ в l_2 равенствами $f_1(\mathbf{x}) = (e_1 - \mathbf{x})/4$, $f_2(\mathbf{x}) = (e_1 + \mathbf{x})/4$, $f_3(\mathbf{x}) = (3e_1 - \mathbf{x})/4$, $f_4(\mathbf{x}) = (3e_1 + \mathbf{x})/4$, $f_5(\mathbf{x}) = O_\sigma(\mathbf{x})/4$.

Путь Q – аттрактор системы \mathcal{S}^* . Перечислим свойства множества Q .

Лемма 4. Система \mathcal{S}^* удовлетворяет условию открытого множества.

Доказательство. Открытое множество W для системы \mathcal{S}^* построим следующим образом. Рассмотрим двойной конус

$$W_0 = \{\mathbf{x} \in l_2 : 0 < x_1 < 1, \|\mathbf{x} - x_1 e_1\| < 1/2 - |1/2 - x_1|\}.$$

Заметим, что для любых $k, l \in \mathbb{N}$, $f_5^k(\overline{W_0}) \cap f_5^l(-\overline{W_0}) = \{0\}$ и для любых $k \neq l$ из \mathbb{N} , $f_5^k(\overline{W_0}) \cap f_5^l(\overline{W_0}) = \{0\}$. Положим $W = \bigcup_{k=0}^{\infty} f_5^k(W_0)$.

Ясно, что $f_5(W) \subset W$ и $f_5(\overline{W}) \cap \overline{W_0} = \{0\}$. Из того, что для любого $1 \leq i \leq 4$, $f_i(W) \subset W_0 \subset W$, следует, что при $i \neq 5$, $f_i(W) \cap f_5(W) = \emptyset$.

Поскольку $\overline{W} \cap -\overline{W} = \{0\}$, $f_1(\overline{W}) \cap f_2(\overline{W}) = \{\frac{1}{4}e_1\}$ и $f_3(\overline{W}) \cap f_4(\overline{W}) = \{\frac{3}{4}e_1\}$. Из того, что $\overline{W} \cap (-\overline{W} + 2\bar{e}_1) = \{e_1\}$ следует, что $f_2(\overline{W}) \cap f_3(\overline{W}) = \{\frac{1}{2}e_1\}$. Отсюда мы получаем, что для любых неравных $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f_i(W) \cap f_j(W) = \emptyset$. \square

Аттрактором подсистемы $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ является единичный сегмент $I_0 = [0, e_1]$, поэтому Q содержит $I_0 = [0, e_1]$ и все его образы $I_k = f_5^k(I_0) = [0, 4^{-k}e_{2k+1}]$, которые образуют бесконечное счетное множество попарно ортогональных сегментов с общим концом в 0.

Лемма 5. Аттрактор Q системы \mathcal{S}^* обладает свойством одноточечного пересечения и является дендритом.

Доказательство. Из включения $[0, e_1] \subset Q \subset \overline{W}$ следует, что $Q_1 \cap Q_2 = \{\frac{1}{4}e_1\}$, $Q_2 \cap Q_3 = \{\frac{1}{2}e_1\}$, $Q_3 \cap Q_4 = \{\frac{3}{4}e_1\}$, и что при $i = 2, 3, 4$, $Q_i \cap Q_5 = \emptyset$. Таким образом, Q является самоподобным континуумом со свойством одноточечного пересечения. При этом, граф пересечений системы $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}$ является деревом. По теореме 2, Q является дендритом. \square

Поскольку для любого $f_i \in \mathcal{S}^*$, $\text{Lip } f_i = 1/4$, размерность подобия s системы $\mathcal{S}^* = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ равна $\log_4 5$.

Так как система \mathcal{S}^* удовлетворяет OSC и $W \cap Q \neq \emptyset$, то для системы \mathcal{S}^* , выполняется сильное условие открытого множества (SOSC). Тогда из [16, Th. 2.6] следует, что $\dim_H Q = s$.

Лемма 6. $\dim_H(Q \times Q) = 2s$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}' = \mathcal{S}^* \times \mathcal{S}^* = \{(f_i, f_j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5\}$. Проверим, что каждое отображение (f_i, f_j) является подобием. Возьмем $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in l_2 \times l_2$, тогда для любых $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ получим

$$\begin{aligned} \|(f_i(x_1), f_j(y_1)) - (f_i(x_2), f_j(y_2))\| &= \|(f_i(x_1) - f_i(x_2)), (f_j(y_1) - f_j(y_2))\| = \\ &= \left\| \frac{1}{4}(x_1 - x_2), \frac{1}{4}(y_1 - y_2) \right\| = \frac{1}{4} \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|. \end{aligned}$$

Отсюда мы видим, что \mathcal{S}' является системой подобий с коэффициентами $r_{i,j} = \frac{1}{4}$, а равенство

$$\bigcup_{i,j=1}^5 (f_i, f_j)(Q \times Q) = \bigcup_{i,j=1}^5 (f_i(Q) \times f_j(Q)) = \bigcup_{i=1}^5 f_i(Q) \times \bigcup_{j=1}^5 f_j(Q) = Q \times Q$$

показывает, что множество $Q \times Q$ есть аттрактор системы \mathcal{S}' . При этом, размерность подобия системы \mathcal{S}' равна $2s = \log_2 5$.

Так как $Q \times Q$ — аттрактор системы \mathcal{S}' , достаточно доказать, что \mathcal{S}' удовлетворяет SOSC (см. [16, Th. 2.6]).

Рассмотрим множество $W \times W$. Поскольку для системы \mathcal{S}^* OSC выполняется, для любых $i \neq j$, $f_i(W) \cap f_j(W) = \emptyset$ и $f_i(W) \subset W$. Поэтому для любых $(i, j) \neq (k, l)$, $(f_i, f_j)(W \times W) \cap (f_k, f_l)(W \times W) = \emptyset$ и $(f_i, f_j)(W \times W) \subset W \times W$. Кроме того, $(Q \times Q) \cap (W \times W) \neq \emptyset$, следовательно, SOSC выполняется для системы \mathcal{S}' . \square

3.2 Отображение $\varphi : Q \rightarrow K^\tau$ и оценка $\dim_H K^\tau$.

Чтобы построить отображение φ аттракторов Q и K , рассмотрим индексные отображения $\pi_Q : I^\infty \rightarrow Q$, $\pi_K : I^\infty \rightarrow K^\tau$, где $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Отметим сразу, что точка $e_1 \in Q$ и точка $\mathbf{w} \in K$ имеют единственный адрес $\pi_Q^{-1}(e_1) = \pi_K^{-1}(\mathbf{w}) = \bar{4}$. Множество адресов точки $0 \in Q$, $A_0 = \pi_Q^{-1}(0) = \{5^n \bar{4}, n = 0, 1, 2, \dots\} \cup \{\bar{5}\}$. Из определения системы \mathcal{S} следует, что $\pi_K(A_0) = 0$.

Допустим, что для некоторых $\xi, \eta \in I^\infty$, $\pi_Q(\xi) = \pi_Q(\eta)$, и покажем, что для них выполняется равенство $\pi_K(\xi) = \pi_K(\eta)$.

Рассмотрим случай, когда $\xi_1 \neq \eta_1$. Тогда возможны следующие пары индексов (ξ_1, η_1) : (1,2); (2,3); (3,4); и (1,5).

Для первой пары, $\pi_Q(\xi) = \pi_Q(\eta) = f_1(0) = f_2(0) = \{e_1/4\}$, поэтому $\pi_K(\xi) = \pi_K(\eta) = S_1(0) = S_2(0) = \{\mathbf{w}/4\}$.

Для второй пары, $\pi_Q(\xi) = \pi_Q(\eta) = f_2(e_1) = f_3(e_1) = \{e_1/2\}$, тогда $\pi_K(\xi) = \pi_K(\eta) = S_2(\mathbf{w}) = S_3(\mathbf{w}) = \{\mathbf{w}/2\}$.

Для третьей пары, $\pi_Q(\xi) = \pi_Q(\eta) = f_3(0) = f_4(0) = \{3e_1/4\}$, тогда $\pi_K(\xi) = \pi_K(\eta) = S_3(0) = S_4(0) = \{(3, 3, 3)/4\}$.

Наконец, для четвертой получим $\pi_Q(\xi) = \pi_Q(\eta) = f_1(e_1) = f_5(0) = \{0\}$, тогда $\pi_K(\xi) = \pi_K(\eta) = S_1(\mathbf{w}) = S_5(0) = \{0\}$.

В случае, когда $\xi_1 = \eta_1$, выберем максимальное общее начальное подслово $\mathbf{j} = \xi \wedge \eta$ и воспользуемся представлениями $\xi = \mathbf{j}\xi'$ и $\eta = \mathbf{j}\eta'$, где $\pi_Q(\xi') = \pi_Q(\eta')$ и $\xi'_1 \neq \eta'_1$. Как было доказано выше, это условие влечет $\pi_K(\xi') = \pi_K(\eta')$, следовательно $\pi_K(\xi) = \pi_K(\eta) = S_{\mathbf{j}}(\pi_K(\xi'))$.

Для каждого $\mathbf{x} \in Q$ положим $\varphi(\mathbf{x}) = \pi_K(\pi_Q^{-1}(\mathbf{x}))$. Тем самым, мы зададим отображение $\varphi : Q \rightarrow K^\tau$.

Теорема 4. Для любых $i = 1, \dots, 5$ и $\mathbf{x} \in Q$, $\varphi(f_i(\mathbf{x})) = S_i(\varphi(\mathbf{x}))$.

Доказательство. Возьмем точку $\mathbf{x} \in Q$. Пусть ее адрес $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots\} \in I^\infty$, т.е. $\mathbf{x} = \pi_Q(\xi)$. Тогда, по определению

$$f_i(\mathbf{x}) = f_i(\pi_Q(\xi)) = \pi_Q(i\xi)$$

где $i\xi = (i, \xi_1, \xi_2, \dots)$.

Аналогично $\pi_K(i\xi) = S_i(\pi_K(\xi))$.

Теперь вычислим $\varphi(f_i(\mathbf{x}))$

$$\varphi(f_i(\mathbf{x})) = \pi_K(\pi_Q^{-1}(f_i(\mathbf{x}))) = \pi_K(\pi_Q^{-1}(\pi_Q(i\xi))) = \pi_K(i\xi).$$

По последнему равенству и определению φ имеем

$$\pi_K(i\xi) = S_i(\pi_K(\xi)) = S_i(\varphi(\pi_Q(\xi))) = S_i(\varphi(\mathbf{x})).$$

Следовательно $\varphi(f_i(\mathbf{x})) = S_i(\varphi(\mathbf{x}))$ для всех $\mathbf{x} \in Q$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. □

Лемма 7. Отображение $\varphi : Q \rightarrow K^\tau$ является липшицевым.

Доказательство. Положим $\varphi(\mathbf{x}) = \pi_K(\pi_Q^{-1}(\mathbf{x}))$. Очевидно $|Q| = \sqrt{17}/4$, $|K^\tau| < 5\sqrt{3}/4$. Для всякого $\mathbf{i} \in I^*$, $|Q_{\mathbf{i}}| = q_{\mathbf{i}}|Q|$, $|K_{\mathbf{i}}| = r_{\mathbf{i}}|K^\tau|$, при этом $r_{\mathbf{i}} \leq q_{\mathbf{i}}$. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$

1) Если $\mathbf{x} \in Q_{\mathbf{i}}$, $\mathbf{y} \in Q_{\mathbf{j}}$ и $Q_{\mathbf{i}} \cap Q_{\mathbf{j}} = \emptyset$, тогда $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (1/4, \sqrt{17}/4)$, $d(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) < |K^\tau|$, то же верно для $f_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}), f_{\mathbf{i}}(\mathbf{y})$.

2) Если для $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^*$, существуют такие $Q_{\mathbf{i}\mathbf{i}}, Q_{\mathbf{j}\mathbf{j}}$, что $Q_{\mathbf{i}\mathbf{i}} \cap Q_{\mathbf{j}\mathbf{j}} \neq \emptyset$, а $\{x, y\} \cap (Q_{\mathbf{i}\mathbf{i}} \cup Q_{\mathbf{j}\mathbf{j}}) = \emptyset$, то $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \max\{q_{\mathbf{i}\mathbf{i}}, q_{\mathbf{j}\mathbf{j}}\}|Q|$. В то же время $d(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) < 2 \max\{q_{\mathbf{i}\mathbf{i}}, q_{\mathbf{j}\mathbf{j}}\}|K^\tau|$. Поэтому $d(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) < 2|K^\tau|d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. \square

Поскольку отображение $\varphi \times \varphi : Q^2 \rightarrow K^{\tau^2}$ также является липшицевым, $\dim_H K^{\tau^2} \leq 2s$.

§ 4. Теорема об общем положении

Приведем теорему об общем положении [17]. Отметим, что здесь она будет использоваться в несколько менее общей форме.

Теорема 5. Пусть $(D, \rho_D), (L_1, \rho_1), (L_2, \rho_2)$ — метрические пространства. Пусть $\varphi_1(\tau, x) : D \times L_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_2(\tau, x) : D \times L_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывные функции, такие что

1) существуют $C > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что $\|\varphi_i(\tau, x) - \varphi_i(\tau, x')\| \leq C\rho_i(x, x')^\alpha$ для любых $\tau \in D$, $i = 1, 2$, и $x, x' \in L_i$;

2) существует $M > 0$ такое, что для каждого $x_i \in L_i, i = 1, 2$, $\tau_1, \tau_2 \in D$ и функции $\Phi(\tau, x_1, x_2) = \varphi_1(\tau, x_1) - \varphi_2(\tau, x_2)$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(\tau_2, x_1, x_2) - \Phi(\tau_1, x_1, x_2)\| \geq M\rho_D(\tau_1, \tau_2).$$

Тогда для множества $\Delta := \{\tau \in D : \varphi_1(\tau, L_1) \cap \varphi_2(\tau, L_2) \neq \emptyset\}$ справедливо

$$\text{неравенство} \quad \dim_H \Delta \leq \min \left\{ \frac{\dim_H L_1 \times L_2}{\alpha}, \dim_H D \right\}.$$

Для анализа преобразований аттракторов в параметрических семействах систем сжимающих отображений мы введём следующие специальные условия и обозначения.

(A1) $\mathcal{S}_\tau = \{S_{1,\tau}, S_{2,\tau}, \dots, S_{m,\tau}\}$ — система сжимающих отображений в \mathbb{R}^n , зависящая от параметра $\tau \in D \subset \mathbb{R}^n$, и K^τ — её аттрактор.

(A2) V — такое компактное множество, что для любого $k \in I$ и любого $\tau \in D$, $S_{k,\tau}(V) \subset V$.

(A3) $r = (r_1, \dots, r_m) \subset (0, 1)^m$ — такой вектор, что для любого $\tau \in D$ и любого $k \in I$, $\text{Lip}S_{k,\tau} \leq r_k < 1$. Пусть $\bar{r} = \max\{r_1, \dots, r_m\}$.

(A4) $C > 0$ — такое число, что для любых $x \in V$, $k \in I$ и для любых $\tau_1, \tau_2 \in D$, $\|S_{k,\tau_1}(x) - S_{k,\tau_2}(x)\| \leq C\|\tau_1 - \tau_2\|$.

Следующая теорема задаёт условия, при которых множества K_i и K_j не пересекаются при почти всех значениях параметра $\tau \in D$.

Теорема 6 ([17], теорема 5). Пусть, в обозначениях (A1)–(A4), $i, j \in I^*$ — некоторые несравнимые мультииндексы.

Пусть $c_i > 0$, $C_j > 0$ таковы, что для любого $x \in V$ и любых $\tau_1, \tau_2 \in D$,

$$\|S_{j,\tau_1}(x) - S_{j,\tau_2}(x)\| \leq C_j\|\tau_1 - \tau_2\| \quad \text{и} \quad \|S_{i,\tau_1}(x) - S_{i,\tau_2}(x)\| \geq c_i\|\tau_1 - \tau_2\|.$$

Если

$$c_i - C_j - \frac{(r_i + r_j)C}{1 - r_{\max}} > 0 \quad \text{и} \quad s < \dim_H(D)/2,$$

то $K_i \cap K_j = \emptyset$ для почти всех $\tau \in D$.

Заметим, что в данной теореме мы можем заменять область D некоторым ее подмножеством D' , тем самым получая более выгодные для наших целей значения параметров c_i и C_j .

§ 5. Применение теоремы об общем положении

Согласно лемме 3, нам необходимо доказать существование параметров $\tau = (\rho, \alpha, \beta) \in D$ таких, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $S_5^m(K_*) \cap S_0^n(K_*) = \emptyset$.

Лемма 8. Для системы \mathcal{S}_τ существует $C > 0$ такое, что для любого $(x, z_1, z_2) = \varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in Q$, $k \in I$ и для любого $\tau_1, \tau_2 \in D$

$$\|S_{k,\tau_1}(\mathbf{x}) - S_{k,\tau_2}(\mathbf{x})\| \leq C\|(\rho_1 - \rho_2, \alpha_1 - \alpha_2, \beta_1 - \beta_2)\|.$$

Доказательство. В системе \mathcal{S}_τ только S_5 зависит от параметра. Поэтому проверим, когда $k = 5$:

$$S_{5,\tau_1} - S_{5,\tau_2} = ((\rho_1 - \rho_2)x, (\rho_1 e^{i\alpha_1} - \rho_2 e^{i\alpha_2})z_1, (\rho_1 e^{i\beta_1} - \rho_2 e^{i\beta_2})z_2).$$

Учитывая $\frac{1}{40} < \rho < \frac{1}{20}$, $|x| \leq 1$, $|z_1| \leq 1$, $|z_2| \leq 1$, оценим абсолютное

значение каждой координаты:

$$\begin{aligned} A_1 &= |(\rho_1 - \rho_2)x| \leq |\rho_1 - \rho_2|; \\ A_2 &= |(\rho_1 e^{i\alpha_1} - \rho_2 e^{i\alpha_2})z_1| \leq \rho_1 |e^{i\alpha_1} - e^{i\alpha_2}| + |e^{i\alpha_2}| |\rho_1 - \rho_2| \\ &\leq \rho_1 |\alpha_1 - \alpha_2| + |\rho_1 - \rho_2| \leq \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{20} + |\rho_1 - \rho_2|; \\ A_3 &= |(\rho_1 e^{i\beta_1} - \rho_2 e^{i\beta_2})z_2| \leq (\rho_1 |e^{i\beta_1} - e^{i\beta_2}| + e^{i\beta_2} |\rho_1 - \rho_2|) \\ &\leq \rho_1 |\beta_1 - \beta_2| + |\rho_1 - \rho_2| \leq \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{20} + |\rho_1 - \rho_2| \end{aligned}$$

тогда

$$\|S_{5,\tau_1} - S_{5,\tau_2}\| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \leq$$

$$\sqrt{3|\rho_1 - \rho_2|^2 + \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|^2}{400} + \frac{|\beta_1 - \beta_2|^2}{400} + \frac{|\rho_1 - \rho_2|}{10} (|\alpha_1 - \alpha_2| + |\beta_1 - \beta_2|)}$$

если $\lambda = \max\{|\rho_1 - \rho_2|, |\alpha_1 - \alpha_2|, |\beta_1 - \beta_2|\}$

$$\leq \sqrt{3|\rho_1 - \rho_2|^2 + \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|^2}{400} + \frac{|\beta_1 - \beta_2|^2}{400} + \frac{\lambda^2}{10}}$$

Последняя величина меньше чем

$$1.8 \cdot \sqrt{|\rho_1 - \rho_2|^2 + |\alpha_1 - \alpha_2|^2 + |\beta_1 - \beta_2|^2}.$$

Таким образом, мы можем взять $C = 1.8$. \square

Рассуждая как в лемме 2, положим $V' = \{(x, z_1, z_2) : 0.25 \leq t \leq 1; (x - t)^2 + |z_1 - t|^2 + |z_2 - t|^2 \leq 0.01\}$ и обозначим через V_* пересечение $C_{01} \cap V'$. Легко проверить, что $K_* \subset V_*$ и при любых значениях $\tau \in D$ и $m \in \mathbb{N}$, $S_1 S_5^m(V_*)$, $S_2 S_5^m(V_*)$, а также $S_3(V_*)$ и $S_4(V_*)$ содержатся в V_* .

Рассмотрим такие значения $\tau \in D$ и $m, n \in \mathbb{N}$, что $S_5^m(K_*) \cap S_0^n(K_*) \neq \emptyset$.

В этом случае рассмотрим проекции указанных множеств на ось Ox . Учитывая, что $\text{Pr}_x(K_*) \subset [\frac{1-\rho}{4}, 1] \subset [\frac{2}{9}, 1]$ получим неравенства

$$\frac{2}{9 \cdot 4^n} < \rho^m < \frac{9}{2 \cdot 4^n}.$$

Лемма 9. Пусть $\psi(\mathbf{x}, \tau) = S_{5,\tau}^m \varphi(\mathbf{x})$. Тогда существует такое $c_m > 0$, что для любого $\mathbf{x} \in Q_*$ и для любых $\tau_1, \tau_2 \in D$

$$\|\psi(\mathbf{x}, \tau_1) - \psi(\mathbf{x}, \tau_2)\| \geq c_m \|\tau_1 - \tau_2\|.$$

Доказательство. Для $\tau_1 = (\rho_1, \alpha_1, \beta_1)$, $\tau_2 = (\rho_2, \alpha_2, \beta_2)$ рассмотрим

$$\|(\rho_1^m - \rho_2^m)x, (\rho_1^m e^{im\alpha_1} - \rho_2^m e^{im\alpha_2})z_1, (\rho_1^m e^{im\beta_1} - \rho_2^m e^{im\beta_2})z_2, \|\|.$$

Учитывая при $(x, z_1, z_2) \in K_*$ $x \geq \frac{2}{9}$, $|z_1| \geq \frac{2}{9}$, $|z_2| \geq \frac{2}{9}$, оценим абсолютное значение каждой координаты:

$$B_1 = |\Delta\rho^m x| \geq \frac{2}{9}m\rho^{m-1}|\Delta\rho|;$$

$$B_2 = |\Delta(\rho^m e^{im\alpha})z_1| \geq \frac{2}{9}m\rho^{m-1}|\Delta\rho + i\rho\Delta\alpha| = \frac{2}{9}m\rho^{m-1}\sqrt{(\Delta\rho)^2 + \rho^2(\Delta\alpha)^2};$$

$$B_3 = |\Delta(\rho^m e^{im\beta})z_2| \geq \frac{2}{9}m\rho^{m-1}|\Delta\rho + i\rho\Delta\beta| = \frac{2}{9}m\rho^{m-1}\sqrt{(\Delta\rho)^2 + \rho^2(\Delta\beta)^2}.$$

$$\begin{aligned} \|\psi(\mathbf{x}, \tau_1) - \psi(\mathbf{x}, \tau_2)\| &= \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2} \\ &\geq \frac{2}{9}m\rho^{m-1}\sqrt{3(\Delta\rho)^2 + \rho^2(\Delta\alpha)^2 + \rho^2(\Delta\beta)^2} \geq \frac{2}{9}m\rho^m\|\Delta\tau\|. \end{aligned}$$

□

Лемма 10. Пусть для $\mathbf{x} \in Q_*$ задано $S_{5,\tau}^m(\varphi_\tau(\mathbf{x}))$, $S_0^n(\varphi_\tau(\mathbf{x}))$. Тогда для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q_*$ и для любых $\tau_1, \tau_2 \in D$ выполняется

$$\|S_{5,\tau_1}^m(\varphi_{\tau_1}(\mathbf{x})) - S_0^n(\varphi_{\tau_1}(\mathbf{y})) + S_0^n(\varphi_{\tau_2}(\mathbf{y})) - S_{5,\tau_2}^m(\varphi_{\tau_2}(\mathbf{x}))\| \geq M\|\tau_1 - \tau_2\|.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} &\|S_{5,\tau_1}^m(\varphi_{\tau_1}(\mathbf{x})) - S_0^n(\varphi_{\tau_1}(\mathbf{y})) + S_0^n(\varphi_{\tau_2}(\mathbf{y})) - S_{5,\tau_2}^m(\varphi_{\tau_2}(\mathbf{x}))\| \\ &\geq \|S_{5,\tau_1}^m(\varphi_{\tau_1}(\mathbf{x})) - S_{5,\tau_2}^m(\varphi_{\tau_1}(\mathbf{x}))\| - \|S_{5,\tau_2}^m(\varphi_{\tau_1}(\mathbf{x})) - S_{5,\tau_2}^m(\varphi_{\tau_2}(\mathbf{x}))\| - \\ &\|S_0^n(\varphi_{\tau_2}(\mathbf{y})) - S_0^n(\varphi_{\tau_1}(\mathbf{y}))\| \geq \frac{80}{9}\rho^m\|\Delta\tau\| - 1.8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \rho^m\|\Delta\tau\| - \frac{1}{4^n} \cdot \frac{4}{3}\|\Delta\tau\| \\ &\geq 9\rho^m\|\Delta\tau\| - 6\rho^m\|\Delta\tau\| = 3\rho^m\|\Delta\tau\|. \end{aligned}$$

□

Теорема 7. При почти всех значениях $\tau \in D$ аттрактор K^τ системы S_τ обладает свойством одноточенного пересечения, и поэтому является дендритом, все точки ветвления которого имеют бесконечный порядок.

Доказательство. Пусть $\varphi_1(\tau, \mathbf{x}) = S_5^m(\varphi(Q))$ и $\varphi_2(\tau, \mathbf{x}) = S_0^n(\varphi(Q))$ для любого $\mathbf{x} \in Q_*$. Из леммы 10, следует, что все условия теоремы 5 выполняются. Это означает, что для почти всех $\tau \in D$, аттрактор K^τ обладает свойством одноточенного пересечения, а его граф пересечений есть дерево. Отсюда, в силу теоремы 2 K^τ является дендритом. В силу предложения 1, точка 0 является точкой ветвления бесконечного порядка. Поскольку все точки ветвления K^τ являются образами точки 0, все точки ветвления K^τ имеют бесконечный порядок. □

Список литературы

1. Hutchinson J. E. Fractals and self-similarity // *Indiana Univ. Math. J.* 1981. V. 30, № 5. P. 713–747.
2. Falconer K. J. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications* / J. Wiely and Sons, New York, 1990.
3. Edgar G. *Measure, Topology, and Fractal Geometry* / 2nd edition. New York: Springer-Verlag, 2008.
4. Moran P. A. P. Additive functions of intervals and Hausdorff measure // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1946. V. 42. P. 15–23.
5. Mandelbrot B. *Fractals, Form, Chance and Dimension* / San Francisco: Freeman, 1977.
6. Тетенев А. В., Самоподобные жордановы дуги и граф-ориентированные системы подобий // *Сибирск. матем. ж.* 2006., т. 47, N. 5 стр. 1147–1159.
7. Bandt C. and Graf S. Self-similar sets 7. A characterization of self-similar fractals with positive hausdorff measure // *Proceedings of the American Mathematical Society.* 1992. V. 114. N. 4 P. 995–1001.
8. Bandt C. and Rao H. Topology and separation of self-similar fractals in the plane // *Nonlinearity.* 2007. V. 20, P. 1463–1474.
9. Tetenov A., Kamalutdinov K. and Vaulin D. Self-similar Jordan arcs which do not satisfy OSC / preprint: arXiv1512.00290.2015.
10. Tetenov A. and Kamalutdinov K. Even unique intersection point can break OSC: an example // *Nonlinearity.* 2020. V. 33 P. 408–417.
11. Allabergenova K., Samuel M., Tetenov A. Intersections of the pieces of self-similar dendrites in the plane // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2024. V. 182.
12. Tetenov A., Yudin I. and Kadirova M. Finiteness properties for self-similar continua // *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S.* 2025. doi: 10.3934/dcdss.2025057
13. Kigami J. *Analysis on Fractals* / Cambridge Tracts in Mathematics. 143, Cambridge: Cambridge University Press. 2001.

14. Samuel M, Tetenov A. V., and Vaulin D. A. Self-similar dendrites generated by polygonal systems in the plane // *Sib. Elektron. Mat. Izv.* 2017. V. 14. P. 737–751.
15. Allabergenova K. and Kadirova M. On self-similar dendrites in Hilbert space, // *Results in Nonlinear Analysis.* 2025 V. 8, N. 1, P. 184–192.
16. Schief A. Self-similar sets in complete metric spaces // *Proceedings of the American Mathematical Society* 1996. V. 124. N. 2. P. 481–490.
17. Aseev V., Kamalutdinov K., Tetenov A. General Position Theorem and Its Applications. In: Devaney, R.L., Chan, K.C., Vinod Kumar, P. (eds) *Topological Dynamics and Topological Data Analysis. IWCTA 2018.* Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 350. Springer, Singapore.

References

1. Hutchinson J. E. Fractals and self-similarity // *Indiana Univ. Math. J.* 1981. V. 30, № 5. P. 713–747.
2. Falconer K. J. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications* / J.Wiely and Sons, New York, 1990.
3. Edgar G. *Measure, Topology, and Fractal Geometry* / 2nd edition. New York: Springer-Verlag, 2008.
4. Moran P. A. P. Additive functions of intervals and Hausdorff measure // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1946. V. 42. P. 15–23.
5. Mandelbrot B. *Fractals, Form, Chance and Dimension* / San Francisco: Freeman. 1977.
6. Tetenov A. *Self-similar Jordan arcs and graph-oriented similarity systems* // *Sib. Matem. Zh.*. 2006., т. 47, N. 5 стр. 1147–1159.
7. Bandt C. and Graf S. Self-similar sets 7. A characterization of self-similar fractals with positive hausdorff measure // *Proceedings of the American Mathematical Society.* 1992. V. 114. N. 4 P. 995–1001.
8. Bandt C. and Rao H. Topology and separation of self-similar fractals in the plane // *Nonlinearity.* 2007. V. 20, P. 1463–1474.
9. Tetenov A., Kamalutdinov K. and Vaulin D. Self-similar Jordan arcs which do not satisfy OSC / preprint: arXiv1512.00290.2015.

10. Tetenov A. and Kamalutdinov K. Even unique intersection point can break OSC: an example // *Nonlinearity*. 2020. V. 33 P. 408-417.
11. Allabergenova K., Samuel M., Tetenov A. Intersections of the pieces of self-similar dendrites in the plane // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2024. V. 182.
12. Tetenov A., Yudin I. and Kadirova M. Finiteness properties for self-similar continua // *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S*. 2025. doi: 10.3934/dcdss.2025057
13. Kigami J. *Analysis on Fractals* /Cambridge Tracts in Mathematics.143, Cambridge: Cambridge University Press. 2001.
14. Samuel M, Tetenov A. V., and Vaulin D. A. Self-similar dendrites generated by polygonal systems in the plane // *Sib. Elektron. Mat. Izv.* 2017. V. 14. P. 737–751.
15. Allabergenova K. and Kadirova M. On self-similar dendrites in Hilbert space, // *Results in Nonlinear Analysis*. 2025 V. 8, N. 1, P. 184–192.
16. Schief A. Self-similar sets in complete metric spaces // *Proceedings of the American Mathematical Society* 1996. V. 124. N. 2. P. 481–490.
17. Aseev V., Kamalutdinov K., Tetenov A. General Position Theorem and Its Applications. In: Devaney, R.L., Chan, K.C., Vinod Kumar, P. (eds) *Topological Dynamics and Topological Data Analysis*. IWCTA 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 350. Springer, Singapore.

Информация об авторах

Махлиё Бобохон кизи Кадирова, аспирант

Scopus Author ID 59737746700

Андрей Викторович Тетенов, доктор физико-математических

наук, доцент

SPIN 7021-9144 AuthorID: 12945

Scopus Author ID 6507500410

Author Information

Makhliyo B. Kadirova, graduate student

Scopus Author ID 59737746700

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)

Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 33-51

Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 33-51

Andrei V. Tetenov, Candidate of Mathematics, Associate Professor
SPIN 7021-9144 AuthorID: 12945
Scopus Author ID 6507500410

*Статья поступила в редакцию 27.11.2025;
одобрена после рецензирования 28.04.2026; принята к публикации
06.05.2026*

*The article was submitted 27.11.2025;
approved after reviewing 28.04.2026; accepted for publication 06.05.2026*